乱流又は高密度プラズマの理論(非線型・非平衡状態の統計力学,基研研究会報告)

一丸, 節夫

乱流又は高密度プラズマの理論

東大・理・物理　一 丸 節 夫

プラズマが熱平衡状態から大きくずれて，ある集団運動のモードが不安定条件に近づいた場合，それに伴って，プラズマ中のゆらぎが非常に大きくなる。これは，プラズマにおける臨界揺動の現象である。[1] さらに不安定領域に入ると，プラズマは乱流状態になる。これは，熱平衡状態に近い静かなプラズマとは質的に異った状態である。物理量のゆらぎは，熱的ゆらぎで代表されるような微視的な強さではなく，巨視的な世界で問題となるような強さをもつようになる。[2,3] 強さのみでなく，ゆらぎの相関距離もデバイ長 λ_D より充分大きな尺度が問題となる。このように，乱流プラズマでは，物理量間の相関が巨視的なスケールで存続するような状態を，取扱うことになる。

荷電粒子系で，強い相関の取扱いが重要になる別の例として，高密度プラズマがある。[4〜6] いま，温度Tで熱平衡状態にある密度nの古典的な電子系を考える。平均の空間電荷は中和されているとする。系中の相関エネルギーと運動エネルギーの比は，プラズマ・パラメータ $\varepsilon = (4\pi n)^{1/2} e^3 (k_B T)^{-3/2}$ で評価される。通常の高温低密度のプラズマでは $\varepsilon \ll 1$ で，相関の効果はあまり重要でない。しかるに，密度が高くなり $\varepsilon \gtrsim 1$ になると，相関エネルギーと運動エネルギーがほぼ同じ大きさをもつようになる。そして，$\varepsilon \simeq 10$ で熱力学的な不安定性がおこり，系の等温圧縮率が発散する。[6] ε がこの臨界値をこえると，系は液相と固相に分離するものと予期される。

このように，乱流状態にあるプラズマや高密度の電子系を理論的に正しく取扱うためには，系に固有の強い相関を理論の枠組の中に組込むことが必要となる。この観点にたって展開された乱流又は高密度プラズマの理論を，以下に概説する。

I・乱流プラズマの基礎理論

(1) 階級方程式を基礎として強い相関を繰込んだ荷電粒子系の動的理論

Bogoliubov−Born−Green−Kirkwood−Yvon（BBGKY）の階級方程式から出発して，プラズマの密度揺動について，そのスペクトル函数を決定する理論を考える。前述のように，乱流プラズマの特徴は，巨視的スケールで存続する相関にあるので，

Rostoker－Rosenbluth の流体的極限にうつり，[7] $\varepsilon \to 0$ をとって差しつかえない。

まず，s 体の分布函数 $f_s(1, \cdots, s)$ を

$$f_s(1, \cdots, s) = \prod_{i=1}^{s} F(i)$$

のように，一体の分布函数 $f_1(1) \equiv F(1)$ の積で表現する取扱いを考える。（数字は，対応する粒子の位相空間での座標を表す。）周知のように，この場合，BBGKY の階級方程式は，F に関する Vlasov 方程式に帰着する。Vlasov 方程式は単一粒子の伝播子（single－particle propagator）を記述するが，その非線型項の存在により，軌道修正の効果が現われ，[8] それを通じて，集団運動の振動数や寿命に影響を与える。この取扱いでは，試電荷としてとりあげた単一粒子が，ある与えられた乱流場の中でどのように振舞うかは記述されているが，試電荷を取上げた行為そのものが，ゆらぎの場に影響を与える可能性は考慮されていない。

次に，二体相間の繰込みを考える。二体の相関函数 $G(1,2)$ を

$$f_2(1,2) = F(1)\,F(2) + G(1,2)$$

で定義し，多体の分布函数を

$$f_{s+1}(1, \cdots, s+1) = f_s(1, \cdots, s)\,F(s+1) \prod_{i=1}^{s} \left(1 + \frac{G(i, s+1)}{F(i)\,F(s+1)}\right)$$

で構成する。この表式により，BBGKY の2番目の方程式に現われる重要な効果は，相関による二粒子間相互作用の修正である。[2] すなわち，クーロン相互作用 $\phi_0(r) = e^2/r$ が，

$$F(1)\,F(2)\frac{\partial}{\partial \vec{r}_1}\psi(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = f_2(1,2)\frac{\partial}{\partial \vec{r}_1}\phi_0(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

できめられる実効的な相互作用，$\psi(r)$ でおきかえられることになる。この修正は，乱流プラズマ，高密度プラズマの両方の取扱いに共通して現われる重要な相関の効果である。上記の修正を別の表現でいい直せば，点電荷間の相互作用が，空間分布をもった電荷群の間の相互作用に置換えられていることになる。この事情を，フーリェ成分で表わ

すと，$e^2 \to e^2\, t(\vec{k})$ という置換えに相当する。ここで，

$$t(\vec{k}) = 1 + \frac{1}{n}\sum_{\vec{q}} \frac{\vec{k}\cdot\vec{q}}{q^2} S(\vec{k}-\vec{q}) \tag{1}$$

また，$S(\vec{k})$ は系の静的な構造因子で，波数空間での密度揺動のスペクトルを表わす。実効相互作用が $S(\vec{k})$ を含むので，それによってきまる集団運動の振動数や寿命も $S(\vec{k})$ の汎函数となる。乱流状態では $S(\vec{k})$，したがって相互作用が大きく変化し，それらを通じて不安定な集団運動が安定化され有限の寿命をとることが期待される。これが e^2 への相関効果の繰込みによる安定な乱流状態の記述の基礎概念である。

上記の考えに基ずいて，BBGKY の第2方程式を解くと

$$S(\vec{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{S}(\vec{k},\omega;S)}{|\tilde{K}(\vec{k},\omega;S)|^2} \tag{2}$$

なる積分方程式が得られる。[2] ここで

$$\tilde{S}(\vec{k},\omega;S) = \int d\vec{v}\ f(\vec{v})\ \delta(\omega-\vec{k}\cdot\vec{v})$$

$$+ \sum_{\vec{q}} b(\vec{k},\vec{q},\omega)\ S(\vec{k}-\vec{q})\, S(\vec{q})$$

は乱流の発生源を表わすスペクトル函数，$f(\vec{v})$ は速度分布函数，また $b(\vec{k},\vec{q},\omega)$ は非線型の結合係数である。$\tilde{K}(\vec{k},\omega;S)$ は，乱流プラズマの実効的な誘電応答函数を表わす。この方程式は，乱流プラズマのみならず，静かなプラズマについても正確なスペクトル函数の表式を与えており，熱平衡状態では揺動散逸定理そのものである。

この積分方程式は，多くの重要な物理内容を含んでいる。まずその形から，$\tilde{K}(\vec{k},\omega;S)=0$ は，乱流プラズマ中の集団運動の分散式を与えていることがわかる。この波動について，非線型結合の効果を含めて，その生成消滅を記述する式を，(2)式から導くことができる。種々のプラズマの状態について，それぞれゆらぎの強さや相関の持続時間を評価し，また系のサイズに依存する効果などを記述することができる。これらについての詳細は，文献2と3にゆずる。

(2) Universal spectrum の理論

5

乱流理論としては，上述のような微視的な取扱いに基ずくものの外に，もう一つの流れがある。それは，粘性流体の乱流理論で特に目ざましい発展をとげたもので，Kolmogorov 的な次元解析に基ずく universal spectrum の理論である。いま系の振舞いに特徴的な長さ r_1 と r_2 があり，$r_1 \ll r_2$ である場合を考える。流体の場合，r_1 は分子間粘性による渦運動の熱化に有効な長さ，r_2 は巨視的な特性長である。その比はレイノルズ数に対応する。その２つの特性長の間で，$r_1 \ll r \ll r_2$ を満足するような領域で $r \rightarrow \alpha r$ なる変換を行う。これに伴い，系の物理量も同様の相似変換が行なわれたとし，$r_1 \ll \alpha r \ll r_2$ である限り，系の振舞を記述する方程式が，そのような相似変換に対して不変であることを要請する。いいかえると，$r_1 \ll r \ll r_2$ での自己相似解（self－similar solution）を求める作業に対応し，二次の相転移の理論での scaling－law hypothesis と等価の考えである。

プラズマの場合に，r_1 としてデバイ長，r_2 としてクーロン衝突による平均自由行程をとる。この比はプラズマ・パラメータ ε であり，$\varepsilon \ll 1$ の場合は，上記の条件を満足する。そこで，$r_1 \ll r \ll r_2$ なる尺度について，BBGKY 方程式の相似解から，ゆらぎや相関を解析する。[3,9,10]

熱平衡に近い静かなプラズマでは，二体相関は一体分布の積に比べて ε のオーダーだけ小さな値をとり，三体相関はさらに ε^2 倍だけ小さいという順序づけがなりたつ。これを基にしたBBGKY 方程式の相似解は，ゆらぎの波数空間でのエネルギー・スペクトルについて，$\mathscr{E}_{\vec{k}} \simeq \langle (1/2) mv^2 \rangle \simeq k_B T$ を与える。これは，等分配則にほかならない。

強く乱れたプラズマについては，上記のような順序づけはなりたたない。実際，二体三体等多体の相関函数のすべてが，一体の分布函数と ε の桁値で同等の値をとることが，そのような乱流プラズマの特質である。したがって，BBGKY 方程式の相似解を求めるにあたっても，この新しい枠組の中で解析されねばならない。その結果は[9]

$$\mathscr{E}_{\vec{k}} = n \left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle k^{-3} \, y \left(k\lambda_D , \cos\chi ; \{z\} \right) \qquad (3)$$

ここで，y は無次元函数，χ は系の非等方性を表わす軸と $\vec{k}$ のなす角，また $\{z\}$ は ε を除く系の無次元パラメータの集合である。

いま粘性流体の慣性領域に対応するものとして，$\lambda_D \rightarrow 0$ をとり，その極限でも y

26

が有限の値をとるものとすると，$\mathcal{E}_{\vec{k}} \simeq n < (1/2) m v^2 > k^{-3}$ を得る。したがって，これが，Kolmogorov スペクトルに対応する，強い乱流状態にある電子プラズマの universal spectrum を表わすものと考えられる。このスペクトルと，Kolmogorov 的な議論との対応の詳細や，パルサー現象との関連などについては，文献9にゆずる。

(3) 乱流プラズマ中の輸送現象

乱流状態にあるプラズマ中の輸送現象は，BBGKY の1番目の方程式を基にして，解析することができる。それにより，電気伝導度，電子及びイオンの加熱率，拡散係数などに対する，乱流スペクトルの影響を定めることができ，[3,11,12] また前述の相似則による解析を，輸送係数の評価に応用することもできる。[3,9]

Ⅱ，高密度プラズマの理論

この場合，熱平衡状態にある電子系における強い相関の繰込み理論を取扱うことになる。前述のように，二体の相互作用が，実効的に t(k) で修正をうけ，それを通じて，誘電応答函数が形状因子 S(k) に依存する。したがって，この表式を揺動散逸定理と組合せると，

$$S(k) = -\frac{\hbar k^2}{8\pi^2 n e^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \ \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2 k_B T}\right) \ \mathrm{Im}\frac{1}{K(k,\omega;S)} \qquad (4)$$

という形の，S(k) に関する self-consistent equation が得られる。Hubbard[13] や Singwi 一派[14] は，この方式により，金属中の電子系について解析を行い，従来の RPA から有意義に改良された結果を得た。しかし，この方式を古典系に適用した場合，既知の正確な解析結果を再現しないなど，重要な難点が見出された。以下では，そのような難点についても改良された理論の内容を概説する。

(1) 電子液体の誘電応答函数

BBGKY の2番目の方程式を考える。これは二体相関を決定する方程式であり，その形式解を見出すのは容易である。その解は，三体の相関函数を含むが，それが二体相関の組合せで書けるならば，結果として得られる式は，二体相関を定める式になる。したがって，熱平衡状態では，この式は (4) 式と等価のものでなければならず，この事

7

を利用して，BBGKY 方程式の解から，誘電応答函数を決定することができる。

三体の相関函数を，二体相関の組合せで表現するのに，O′Neil と Rostoker の解析結果を利用する。[15] 彼等はプラズマ・パラメータの展開について，最低次の三体相関の形を計算した。それに基ずき，三体の位置相関が

$$h(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = g(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\, g(\vec{r}_2, \vec{r}_3) + g(\vec{r}_2, \vec{r}_3)\, g(\vec{r}_3, \vec{r}_1) + g(\vec{r}_3, \vec{r}_1)\, g(\vec{r}_1, \vec{r}_2) + n\int d\vec{r}_4\, g(\vec{r}_1, \vec{r}_4)\, g(\vec{r}_2, \vec{r}_4)\, g(\vec{r}_3, \vec{r}_4),$$

なる形で，二体の位置相関 $g(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ で表わされるものとする。その結果，誘電応答函数は，[4]

$$K(k, \omega; S) = 1 - \frac{\phi(k)\,\chi(k, \omega)}{1 - \phi(k)\, w(k)\, \chi(k, \omega)} \tag{5}$$

ときまる。ここで

$$\phi(k) = 4\pi e^2 / k^2$$

$$\chi(k, \omega) = -\frac{n}{m}\int d\vec{v}\, \frac{1}{\omega - \vec{k}\cdot\vec{v}}\, \vec{k}\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}$$

$$w(k) = \frac{1}{n}\sum_{\vec{q}} \frac{\vec{k}\cdot\vec{q}}{q^2}\, S(q)\left[S(|\vec{k}-\vec{q}|) - 1 \right]$$

(2) 熱力学的諸性質の検討

誘電応答函数（5）を，揺動散逸定理と組合わせることにより，$S(k)$ に関する積分方程式が得られる。この方程式を，ε 展開により解析的にとくことにより，次のことがわかる。[5]

(i) 相関エネルギーについて，既知の解析結果[16]を厳密に再現する。したがって，熱力学的に計算される等温音速も，ε 展開の同じ次数まで正確に与えられる。

(ii) 圧縮率の総和則により，$S(k)$ の $k \to 0$ の振舞からきまる等温音速は，上記の熱力学的音速と，$\varepsilon^2 \ln \varepsilon$ の項まで一致する。

これらの一致点は，これまでの他の理論にはみられなかった改良になっている。それ

で次に，ϵ 展開によらず，$\epsilon \gtrsim 1$ の領域を含めて，積分方程式を直接数値的に解くことを試みる。計算は $\epsilon \leq 10$ の領域で行なわれ，次のことがさらにわかる。[6]

(iii) 相関エネルギーの値は，Brush 等による Monte Carlo 計算の結果と，[17] 非常によく一致する。相関函数についても，同様の一致がみられ，短距離相関の振舞いも，他の理論と比べて，大きな改良になっている。

(iv) $\epsilon \simeq 10$ で等温音速の二乗が零になり，熱力学的不安定性があらわれる。それに附随して，Ornstein－Zernike 型の臨界揺動や相分離が予知される。

(3) 非理想プラズマのKinetic equation

プラズマの衝突項として周知のBalescu－Lenard の式は，Boltzmann の衝突項などと同様に，系の運動エネルギーを一つの保存量とする形になっている。高密度プラズマでは，相関エネルギーの効果が重要性を増すので，そのような非理想プラズマについて，従来の Kinetic equation を再検討する必要がある。この問題についても，最近，理論面での進展がみられている。[18,19]

参 考 文 献

1) S.Ichimaru, D.Pines, and N.Rostoker, Phys. Rev. Letters 8 (1962), 231.
2) S.Ichimaru, Phys. Fluids 13 (1970), 1560.
3) S.Ichimaru, Basic Principles of Plasma Physics (W.A.Benjamin Inc., Reading, Mass., 1973).
4) S.Ichimaru, Phys. Rev. A 2 (1970), 494.
5) H.Totsuji and S.Ichimaru, Prog. Theor. Phys. 50 (1973), 753.
6) H.Totsuji and S.Ichimaru, "Dielectric Response Function of Electron Liquids. III — Numerical Investigation of Static Properties", Plasma Theory Group Preprint No. 9, to be published.
7) N.Rostoker and M.N.Rosenbluth, Phys. Fluids 3 (1960), 1.
8) T.H.Dupree, Phys. Fluids. 9 (1966), 1773.
9) S.Ichimaru, Phys. Rev. A8 (1973), 2085.

10) T. Tajima, S. Ichimaru, and T. Nakano, "Energy Transfer Equation and Universal Spectrum of Ion-Acoustic Wave Turbulence", Plasma Theory Group Preprint No. 6, to be published in J. Plasma Phys.

11) S. Ichimaru and T. Tange, J. Phys. Soc. Japan 36 (1974), February issue.

12) T. Tange and S. Ichimaru, "Theory of Anomalous Resistivity and Turbulent Heating in Plasmas", Plasma Theory Group Preprint No. 8, to be published.

13) J. Hubbard, Phys. Letters 25A (1967), 709.

14) K. S. Singwi, M. P. Tosi, R. H. Land, and A. S. Sjölander, Phys. Rev. 176 (1968), 589.

15) T. O'Neil and N. Rostoker, Phys. Fluids 8 (1965), 1109.

16) R. Abe, Prog. Theor. Phys. 21 (1959), 475.

17) S. G. Brush, H. L. Sahlin, and E. Teller, J. Chem. Phys. 45 (1966) 2102.

18) Yu. L. Klimontovich, Sov. Phys. JETP 35 (1972), 920.

19) M. Shibata and S. Ichimaru, Prog. Theor. Phys. 50 (1973), 1120.

フォノンの非線形相互作用

日電中研　　中 村 紀 一

§1 序 論

伝導電子のドリフト速度が音速を超えるとき起るフォノンの増幅現象は CdS や GaAs のような圧電性半導体で観測される。増幅は波動ベクトルがドリフト速度のまわり約10° の狭いチェレンコフ・コーンの中にあるフォノンで起り，そのエネルギーは熱平衡の 10^6-10^8 倍になる（第1図[1]）。

増幅が更に進むとフォノンの間に強い非線形相互作用が現われ系は熱平衡から大きく